



TITLE:

自由表面および成層,回転流体中に
励起される波動と非線形効果(波の
非線形現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

花崎, 秀史

CITATION:

花崎, 秀史. 自由表面および成層,回転流体中に励起される波動と非線形
効果(波の非線形現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 1996,
949: 1-12

ISSUE DATE:

1996-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60309>

RIGHT:

自由表面および成層, 回転流体中に励起される波動と非線形効果

国立環境研究所 花崎秀史*

1 いろいろな波動の類似点

我々の知っている流体中の波動のうち, 水面波, 成層流体中の内部重力波, 旋回流中の慣性波, 地球流体中のロスビー波などは, 種々の条件下でいろいろな形態をとって現れるが, これらは, 数学的に類似の方程式系に支配されているため, 共通する要素が数多く存在する. ここでは, これらの系に類似の側面をまず「線形理論」の観点から記述し, そのあと, 個々の系における波動における「非線形効果」を, 非線形理論とナビエ・ストークス方程式 (ロスビー波の場合は準地衡風近似の方程式) の解との比較を中心に記述する. その際, それぞれの系における波動の「類似性」と「違い」に注目していく.

尚, ここでは, 波が「物体により励起される」場合のみを考える. 現実に観測される波動が, 山によって励起される大気中の山岳波 (内部重力波) や大規模スケールの山岳により励起されるロスビー波であったりすることも多いことから, 「物体による励起」が, 現実の波の生成と伝播の基本的メカニズムの一つを担っていることは間違いない.

また, ここでは, 流体の深さあるいは流路の幅が「有限」で, 境界に平らな壁がある場合のみを考える. これは, 山岳波やロスビー波など自然界での現象を考える場合には仮想的とも言えるが, この有限幅の流れは, 単に無限領域を考える場合に生じる数値計算上の境界条件の問題が起こらないという利点があるばかりでなく, 「波の励起と伝播を考える上での基本的側面」がこの場合に殆んど含まれていることから (Baines, 1995)¹⁾, 理論的にも最も詳しく研究されてきたという経緯もある. また, 室内実験ではこの場合しか実現できないということもある.

波が立つのには, 何らかの復元力が必要である. それは, 水面波では重力, 成層流体中の内部重力波では上下の密度差による浮力, 旋回流中の慣性波では, 流体が円管の中心軸の回りをぐるぐるまわっていることからくる向心力, ロスビー波では地球の自転によるコリオリ力である.

2 線形波動 一波の上流伝播と下流の定在波一

まず, 線形理論を考える. 一般に, n 番目のモードに対する波の線形分散関係が

$$\omega = \omega(k) \quad (1)$$

(k : 流れ方向の波数) のように求まったとする. 波の位相速度 C_p (波形の動く速度) と振動数 ω との間には $\omega = C_p k$ の関係があり, また, 群速度 C_g (波のエネルギーの伝わる速度) は, $C_g = \partial\omega/\partial k$ であるから, 分散関係さえわかれば, 位相速度と群速度はすぐに計算できる. さて, 水面波, 内部重力波, 慣性波においては, 多くの場合, 以下の (2), (3) の 2 つの関係が成立する. 何をもって「多く」の場合とするかについては問題があるが, 少なくとも, 水面波であれば浅水波 (Lighthill, 1978)²⁾, 内部重力波であれば, ブシネスク近似の成り立つ (鉛直密度勾配が小さい) 流体で, かつ, 鉛直密度勾配

* 〒305 つくば市小野川 16-2, e-mail: hanazaki@sun10a.nies.go.jp

$(d\rho/dz)$ が一定の場合^{1),2)}, 慣性波であれば, 旋回流速が剛体回転の場合 (Batchelor, 1967)³⁾, 以下の (2), (3) が成り立つ. これらは, いずれも, 教科書に必ず登場するいわば「教科書モデル」であり, 最も典型的な場合である.

$$C_p(k) \geq C_g(k) \quad (\text{等号は } k = 0 \text{ の時のみ成立}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial C_p}{\partial k} < 0, \quad \frac{\partial C_g}{\partial k} < 0, \quad (3)$$

ここで C_p, C_g はいずれも, 静止流体に対する速度で, かつ上流向きとする. 波には下流向きのものも存在するが, それらは必ず, 流体の速度よりも速く下流へ流されてしまうことになるので, 実際上はあまり意味がない.

さて, (2) と (3) の 2 つの関係式だけで, 流体中の典型的な波動の物体からの伝播の基本的部分は表せていると言っても過言ではない. まず, (2) は, 位相速度が群速度よりも大きいことを示している. 物体に対して止まって見える波 (定在波) がもしあって, その波数を k_s とすると, 一様流速を U として, $C_p(k_s) = U$ の関係を満たす. この時 (2) から, $C_g(k_s) - U < 0$ だから, この波数成分に関しては, 波のエネルギーの伝播は下流向きである. したがって, 定在波は, 物体の必ず下流に立つ (図 1a 参照). 成層大気中の山の下流に立つ定在波は, 気象学では風下波 (lee wave) と呼ばれている.

一方, $k < k_s$ を満たす波数成分 k に対しては (3) より $C_p(k) - U > 0$ であるから, 波形 (波の位相) が上流へ伝播するように「見える」はずである. さらに, $C_g(k_0) = U$ を満たす $k_0 (< k_s)$ よりも小さい波数 k に対しては, (3) より $C_g(k) - U > 0$ であることがわかる. したがって, 波のエネルギーも上流向きとなり, 物体により励起された $k < k_0$ を満たす波数成分 (すなわち長波長) は物体の上流に伝播することになる (図 1a). また, (3) より, 最も上流への伝播速度が速いのは, 波長無限大 $k = 0$ の波であるが, (2) より, $C_p(0) = C_g(0)$ だから, $k = 0$ の波が位相速度, 群速度共に一番速い. (3) より, 波長が短い (k が大) ものほど伝播速度が遅く, 上流に伝播する波の成分の最大波数 (最短波長) が k_0 ということになる.

各モードで最も伝播速度が速い $k = 0$ (波長無限大) の成分の伝播速度を C_n とすると,

$$C_n \equiv C_p(0) = C_g(0), \quad (4)$$

であるが, この値は, 通常, モード n ($n \geq 1$) が大きくなるほど小さくなる. したがって, 最も伝播速度が速い波は, $n = 1$ のモードの, 主流方向の波長が無大の波であることがわかる. その伝播速度は C_1 であるから, $C_1 > U$ の時, 主流に逆らって $C_1 - U$ の速さで物体の上流への伝播が生じることになる (例えば, Hanazaki, 1989)⁴⁾. そこで, この条件を現す指標として, フルード数 F を

$$F \equiv U/C_1, \quad (5)$$

で定義すると, 線形の波は, $F < 1$ (subcritical) の時, 上流伝播を起こす. 逆に, $F > 1$ (supercritical) の時は, すべてのモード ($n \geq 1$) の群速度が主流速よりも遅いため, 上流伝播は起こらないことになる. また, $F = 1$ (resonant: 共鳴) の時は, $C_1 - U = 0$ のため $n = 1$ のモードのエネルギーが時間と共に物体近傍に溜ることから, 線形理論による解は, 時間 t に比例して発散する (図 1b). したがって, この場合は, 非線形効果を考える必要がある. より一般には, $C_n = U$ の近傍では n 番目のモードが共鳴するため, そのモードの振幅が最大となることが予想される.

ここで非常に重要なことは, $C_p(0) = C_g(0) > C_p(k_s)$ であるから, 定在波がある時には, それと同じモードの長波長成分 ($k = 0$) が必ず上流伝播するということである. すなわち, 「上流と下流の波は, 同時に存在」しなければならないということである. 波の上流伝播の問題は, 「upstream influence」の問題として古くから議論されてきたが, 波の分散関係からだけでも, 以上のような多くの有益な情報が得られるのである. 図 1 には, 線形波動の励起と伝播の概要をまとめた.

以下では, 内部重力波の場合に例を絞って説明を行う. 水面波, 慣性波及びロスビー波については, 簡単に触れるにとどめる. 特に, 慣性波については本年発行の「ながれ」にすでに解説

(花崎,1996)⁵⁾を行っているので,そちらを参照されたい. また,内部重力波についても,最近刊の Baines(1995)¹⁾の本が非常に詳しいので,是非そちらも参照されたい.

3 成層流体中の内部重力波

3.1 弱非線形理論 – forced KdV 方程式 –

§2 で述べたように,共鳴条件 (resonant) の時には,線形理論による解は,波のエネルギーが物体の近傍にたまることから発散してしまうので,何らかの非線形効果を考える必要がある. そこで,長波長近似 (主流方向の代表的波長を L , 流体の深さを D として, $\epsilon = (D/L)^2 \ll 1$ とする近似) の弱非線形理論である KdV 型の方程式を考える. 成層流中の内部重力波に対する,物体による外力のない場合の KdV 方程式は, Benjamin(1966)⁶⁾ によって導出され,その後, Grimshaw & Smyth(1986)⁷⁾ により,物体の効果を外力 (forcing) として含む形で forced-KdV (fKdV) 方程式として導出された. fKdV 方程式は, 水面波 (Wu, 1981⁸⁾; Akylas, 1984⁹⁾, 慣性波 (Grimshaw, 1990)¹⁰⁾, ロスビー波 (Mitsudera & Grimshaw, 1990)¹¹⁾ に対しても導出されている. 導出方法の詳細は原論文にまかせることにして,結果だけ書くと n 番目のモードの共鳴条件近傍 ($U = C_n + \epsilon\Delta$) での,流体の鉛直変位 ζ は,

$$\zeta = \epsilon A_n(X, T) f_n(z) + O(\epsilon^2), \quad (6)$$

の形に書ける. ここで, X, T は, $X = \epsilon^{\frac{1}{2}}x$, $T = \epsilon^{\frac{3}{2}}t$ であり, $f_n(z)$ は, n 番目のモードの鉛直 (z) 方向の分布関数で, 方程式

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{\rho} C_n^2 \frac{df_n}{dz} \right) - g \frac{d\bar{\rho}}{dz} f_n = 0, \quad (7)$$

の解として与えられる. ここで, $\bar{\rho}(z)$ は, 上流での鉛直密度分布であり, また, 流れの上下壁での境界条件 (鉛直変位が 0) から,

$$f_n(0) = f_n(D) = 0, \quad (8)$$

でなければならない. (7) と (8) は, Sturm-Liouville 型の固有値問題になっていて, $f_n(z)$ が固有関数, C_n が固有値ということになる. $f_n(z)$ は鉛直方向の波の構造を表し, C_n は, (4) と同じく, 線形長波長極限での波の位相速度 (= 群速度) である. これらは $\bar{\rho}(z)$ によって決まる. そして, 波の振幅 $A_n(X, T)$ が, forced KdV (fKdV) 方程式に支配されることになる. しかし, ここでは ϵ についても 1 次高次の非線形項までを入れた方程式: forced extended KdV (fEKdV) 方程式 (Melville & Helfrich, 1987¹²⁾; Hanazaki, 1992¹³⁾) を書いておく.

$$-\frac{1}{C_n}(A_T + \Delta A_X) + a_1 A A_X - \epsilon a_2 A^2 A_X + a_3 A_{XXX} + G_X = 0. \quad (9)$$

ここで, $A \equiv A_n(X, T)$ であり, $a_2 A^2 A_X$ は高次の非線形項で, $a_2 = 0$ にとると, (9) は fKdV 方程式となる. 尚, 係数は例えば,

$$a_1 = \frac{3 \int_0^D \bar{\rho} \left(\frac{df_n}{dz} \right)^3 dz}{2 \int_0^D \bar{\rho} \left(\frac{df_n}{dz} \right)^2 dz} \quad (10)$$

である. 外力項 $G(X)$ は, 流体の底にある物体の形 $h(X)$ を

$$z = \epsilon^2 h(X), \quad (11)$$

のようにスケーリングして,

$$G(X) = \frac{1}{2L_n} \left(\bar{\rho} \frac{df_n}{dz} \right)_{z=0} h(X), \quad (12)$$

である. 一般の成層状態の場合, 例えば, 二層流体の場合には, $a_2 = 0$ とおいた fKdV 方程式が近似的に成り立つことが期待される. しかし, 実際には, 以下に示すように高次の非線形効果が無視できないことが多い.

3.2 二層流体中の内部重力波と高次の非線形効果

図2のような二層流体を考える. この場合, $F = 1$ の場合でも, 非線形効果による伝播速度の増加の結果, 長時間のうちに物体上流への孤立波 (solitary wave) の放出が起こる. これは, 例えば sech^2 型の孤立波であれば, 振幅に比例して伝播速度が増すことによる. また, 上流へ出た孤立波の「質量」を補うために, 物体のすぐ下流 ($x > 0$) には, 時間と共に, ほぼ平らなくぼみ ($A < 0$ の領域) がのびて行く. これは, fKdV あるいは fEKdV 方程式 (9) を $X = -\infty$ から $X = \infty$ まで x で積分すると, $G(-\infty) = G(\infty) = 0$ である限り, 「質量保存」の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} A dx = 0, \quad (13)$$

が成立しているからである.

さて, 図3aに, Navier-Stokes 方程式の解 ($Re = UD/\nu = 10^3$) から得た振幅 A の時間発展を示した¹³⁾. (ここで, A の値は二層界面の変位に比例するので, 界面変位と思って差し支えない. また, この計算例では, 数値計算の都合上, 鉛直密度分布は \tanh 型の分布を用いているので, 界面での密度変化は厳密に言うとは連続的である. しかしこれは, 結果に殆んど影響しない.) これより, 「長時間」のうちには, 上流に波が伝播していく様子がわかる. しかし, 対応する fKdV 方程式の解 (図3b) の方が, 孤立波の伝播速度がずっと速く, 振幅も大きく, かつ発生周期が短い. 一方, 高次の非線形項 ($A^2 A_X$) まで考慮した fEKdV 方程式の解 (図3c) では, 上流への伝播速度はずっと小さく, Navier-Stokes 方程式の解に近い. このことは, 高次の非線形項の効果が重要であることを示唆している. それは, どうしてであろうか?

一般に, 二層流体では, KdV 型の方程式の2次と3次の非線形項の係数の比は, 上層の密度を ρ_1 , 厚さを h_1 , 下層の密度を ρ_2 , 厚さを h_2 として,

$$\frac{a_2}{a_1} = -2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}}{\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1} \right), \quad (14)$$

である. 図4にこの様子を ρ_1/ρ_2 の関数として示した. 流れの安定性の条件から, $\rho_1/\rho_2 < 1$ とすると, $|a_2/a_1|$ の最小値は, $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 0, h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow D$ の極限で生じ, その値は¹³⁾,

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| = 2D^{-1}, \quad (15)$$

である. 一方, 水面波の場合は,

$$\frac{a_2}{a_1} = 0.25D^{-1}, \quad (16)$$

であることが知られている (Marchant & Smyth, 1990)¹⁴⁾. したがって, 二層流体である限り, どんな密度比, 層の厚さの比をとろうと, 水面波に比べて $|a_2/a_1|$ は8倍以上大きいことになる. そして, fEKdV 方程式の3次と2次の非線形項の大きさの比は,

$$\frac{\epsilon a_2 A^2 A_X}{a_1 A A_X} = \epsilon A \frac{a_2}{a_1} \sim \zeta \frac{a_2}{a_1}, \quad (17)$$

であるから、二層流体中の波では水面波に比べて波の振幅 ζ が $1/8$ 以下でないと、3次の非線形項の効果が大きくなる。すなわち、振幅が非常に小さい場合以外は高次の非線形項が無視できないことになる。これが、Navier-Stokes 方程式の解における上流への波の伝播速度が、fKdV 方程式よりも fEKdV 方程式の解に近い理由である¹³⁾。過去の二層流体の実験(物体なし)でも、振幅が水深のわずか3%程度で高次の効果が波形に現れることが知られている(Koop & Butler, 1981)¹⁵⁾。また、Melville & Helfrich(1987)¹²⁾は、物体を過ぎる二層流の実験を行い、振幅の大きい $F=1$ の付近で、fEKdV 方程式と fKdV 方程式の差が現れ、そこでは fEKdV 方程式が与える台形(Bore)型の解(Kakutani & Yamasaki, 1978)¹⁶⁾の方が、波形においても実験との一致が良いことを示している。

ちなみに、水面波では、振幅が水深の50%を越えるような場合でも、fKdV 方程式の予測が実験と定量的にもかなり良く一致する(Lee, Yates & Wu, 1989)¹⁷⁾。また、旋回流中の慣性波でも(Burgers vortex 型の旋回流速の時)、高次の非線形項の効果は小さく、波の振幅がかなり大きい場合でも fKdV 方程式の予測が Navier-Stokes 方程式の解を良く一致する(Hanazaki, 1991¹⁸⁾, 1993¹⁹⁾)。したがって、二層流体は、高次の非線形効果が(振幅が非常に小さい場合以外は)重要という意味で特殊とも言える。

3.3 強非線形理論 — Grimshaw-Yi の方程式—

ところで、成層流体の「教科書モデル」である、ブシネスク近似が成り立ち(鉛直密度差が小さい)で、かつ、鉛直密度勾配($d\rho/dz$)が一定の流体では、(9)式の a_1, a_2 など、KdV 型の弱非線形方程式の非線形項の係数が、3次以上の高次の非線形項($a_2 A^2 A_X$ など)も含めてすべて消えてしまう(Grimshaw¹⁰⁾の Appendix 参照)。この場合は、「定常状態」の非線形方程式は、線形化せずともたまたま「線形」になるというありがたい性質を持っていて(Long, 1953)²⁰⁾成層流の分野では「Long の方程式」として、その「非線形方程式の厳密解」がさかんに求められたこともあった(例えば、Miles, 1968)²¹⁾。(実際には、§2 で見たように、下流の定在波が立つ時には必ず上流に波が伝播し、流れが完全に定常になることは殆んどあり得ないが。)しかし一方、非定常の場合には、通常の弱非線形理論さえ役に立たないという困った状況におちいる。そこで、考え出されたのが次のGrimshaw-Yi(1991)²²⁾(GY)の方程式である。これは、共鳴条件近傍での「強非線形波動」を記述する。尚、全く同じ状況は、剛体回転の旋回流(慣性波)(Grimshaw & Yi, 1993)²³⁾、地球流体中のシアのない帯状流(ロスビー波)(Grimshaw & Yi, 1993)²⁴⁾でも生じる。以下に GY 方程式の要点を述べる。流体の鉛直変位 ζ を

$$\zeta = A_n(X, T) f_n(z) + O(\epsilon), \quad (18)$$

ただし、固有関数 $f_n(z)$ は、

$$f_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{D}\right), \quad (19)$$

であり、 x, t は fKdV および fEKdV 方程式の場合と同様にスケーリングする。また、物体の形を

$$z = \epsilon h(X), \quad (20)$$

のようにスケーリングする(fKdV の場合の(11)と異なる)。ここで(18)からわかるように、流体の鉛直変位に対する波の摂動は $O(\epsilon^0) = O(1)$ であり、この理論は大振幅波動を記述できる強非線形理論である。ただし、 x 座標および、物体の大きさのスケーリングからわかるように、長波長近似でかつ、微小物体に対する方程式であることは、fKdV あるいは fEKdV 方程式と同じである。さて、こうして得られる $A = A_n(X, T)$ に対する方程式は、

$$-\frac{N^2}{C_n^2} \int_{-\infty}^X K(A, A') \frac{\partial A'}{\partial T} dX' - \frac{DN^2}{C_n^2} \Delta A + \frac{1}{2} C_n D A_{XX} + N f \left(1 - \frac{NA}{C_n}\right) = 0, \quad (21)$$

である。ここで、 C_n は(4)と同じ長波の速度で、

$$C_n = \frac{ND}{n\pi}, \quad (22)$$

(N : Brunt-Väisälä 振動数) である。また,

$$A' = A(X', T), \quad (23)$$

であり, 積分核 $K(A, A')$ は,

$$K(A, A') = \int_0^D \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial z'}{\partial A'} d\xi - \int_0^D \left[z \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z'}{\partial A'} \right) + z' \frac{\partial z'}{\partial A'} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z}{\partial A} \right) \right] d\xi, \quad (24)$$

である。ここで現れた新しい独立変数 $\xi = \xi(z, A)$ は,

$$\xi \equiv z - A_n(X, T) f_n(z), \quad (25)$$

で与えられる。これを z の代わりに使うわけである。ところで, 逆変換 $z = z(\xi, A)$ が存在するためには,

$$1 - A_n(X, T) \frac{df_n}{dz} \neq 0, \quad (26)$$

がすべての z ($0 \leq z \leq D$) に対して成立している必要がある。(19) を使うと, この関係は,

$$-\frac{D}{n\pi} < A_n < \frac{D}{n\pi}, \quad (27)$$

と同値であることがわかる。実は, (25) の ξ は流れ関数と $O(\epsilon)$ の誤差で一致するので, 条件 (26) の等号は水平流速が 0 になる (逆流が始まる) 条件とほぼ同等である。また, モード $n = 1$ に対しては, (27) で A_1 の値が D/π 以上になると, $z = 0$ で逆流が生じ, $-D/\pi$ 以下になると, $z = D$ で逆流が生じることもわかる。以上のことは, GY 方程式が, 波の振幅が大きくなって逆流が生じた時点で成立しなくなるという限界を示す一方, その時点までは, 「強非線形波動」の時間発展を記述でき, かつ, 「碎波 (逆流) の発生を予測」できる可能性を示している。

図 5 には, Navier-Stokes 方程式の解と GY 方程式の解における, 振幅 $A = A_1(x, t)$ の $F = 1$ 近傍での時間発展の比較を示した (Hanazaki, 1992¹³, 1993²⁵)。両者の一致は, 「定量的」に良いことがわかる。したがって, 残る重要な興味は, GY 方程式が碎波 (逆流) を予測できるか? という点である。そこで, 図 5 の場合よりも物体の高さを 3 倍にして計算した結果が図 6²⁵) である。図 6a の GY 方程式の解で振幅 A が (27) の下限 $-D/\pi$ ($n = 1$) に達するのは時刻 $Ut/D = 57.5$, 位置は, $x = 2D$ である。一方, Navier-Stokes 方程式の解 (図 6b) では, 時刻 $Ut/D = 60.96$, 位置は, $x = 1.59D$ である。また, 振幅 A が (27) の「下限」に達するということは, 碎波は流路の上端 ($z = D$) で起こることを示している。碎波が生じてからかなり時間が経ったあとの流線が図 6c であるが, 確かに, 流路の上端 ($z = D$, $x \sim 2D$) に最も大きな碎波が生じていることがわかる。このことから, GY 方程式は, 碎波の予測も可能であることがわかる。

3.4 3次元流体中の波動 — forced KP 方程式—

3次元流体の場合, x 方向の波長に比べて流路の幅が十分広ければ, 共鳴条件近傍での波は, forced Kadomtsev-Petviashvili (fKP) 方程式あるいは高次の非線形項を持った forced extended KP (fEKP) 方程式によって記述される (Katsis & Akylas, 1987²⁶; Hanazaki, 1994²⁷)。この場合, x, t , 及び, 物体のスケーリングは fKdV 及び fEKdV 方程式と同じである。 y 方向のスケーリングは,

$$Y = \epsilon y,$$

である。得られる $A = A_n(X, Y, T)$ に対する fEKP 方程式は,

$$-\frac{1}{C_n}(A_T + \Delta A_X) + a_1 A A_X - \epsilon a_2 A^2 A_X + a_3 A_{XXX} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^X A_{YY} dX + G_X = 0, \quad (29)$$

である。ここで、 a_1, a_2, a_3 は、fEKdV 方程式と同じである。図7に、ここで例として示す流れの概略を示した²⁷⁾。流体は二層流体で、物体が3次元的山であること、側壁があること以外、鉛直密度分布などは図2の2次元の場合と同じである。

図8に $F = 1$ の時に Navier-Stokes 方程式の解から得られた ($Re = 10^4$) 振幅 $A = A_1(x, y, t)$ の時間発展を示した²⁷⁾。初期には波は、物体のある $x = y = 0$ 付近からカーブを描きながら下流方向へ向かっているが、側壁 ($y = 40D$) で反射が始まると、側壁に直角な第三の波 (Mach stem) が立ち、時間と共にそれが側壁に垂直に伸びてくる (図8d: $Ut/D = 400$)。それによって上流の波は、「2次元」になる。この反射では、これ以外にも反射角が入射角よりも大きい、反射波の振幅が入射波に比べて小さいなどの特異な性質を持ち、衝撃波の反射との形態の類似性により、マッハ反射と呼ばれている (Miles, 1977^{28), 29)}, Tanaka, 1993³⁰⁾)。側壁での波の反射をわかりやすくするため、図8に対応する A の等高線を図9に示した。波の反射が、確かに上に記したような特徴を持っていることがわかる。ただし、3次元波動の場合も2次元の場合と同様、2層流体では高次の非線形項が大抵無視できない。したがって、上流の波は sech^2 型の波形を必ずしも持っておらず、Mach 反射の理論との比較はあくまでも定性的である。また、下流の波のパターンは fEKP 方程式の方が fKP 方程式よりも Navier-Stokes 方程式の解との一致がよいなどの差も見られる²⁷⁾。尚、3次元の場合も2次元の場合と同様、KdV 型の高次の非線形項が0になる場合があるが、2次元の場合の GY 方程式に対応するような方程式は、まだ得られていない。

4 おわりに

以上、水面波、内部重力波、慣性波、ロスビー波について、理論と数値解との比較を通じて、これらの「類似性」と「違い」をできるだけ簡明に説明してきたつもりである。要約すると、(1) 波の伝播に関しては線形理論が基本であること、(2) 弱非線形理論は実際の条件でどの程度有効かのチェックが必要であること (高次の非線形効果など)、特に、「教科書モデル」のような典型的な場合に「使えない」場合があることに注意が必要であること、また、(3) 最近導出された Grimshaw-Yi 方程式は、「教科書モデル」に対して非常に有効で、大振幅波動を記述できるばかりか、砕波 (逆流) の予測まで可能なこと、であろうか。

尚、ページ数の関係もあって至らなかった部分も多いので、興味のある方は、引用文献などで補っていただければ幸いである。

5 引用文献

- 1) P.G.Baines: Topographic effects in stratified flows, (Cambridge University Press, 1995) pp.482.
- 2) J. Lighthill: Waves in Fluids, (Cambridge University Press, 1978) pp.504.
- 3) G. K. Batchelor: An Introduction to Fluid Dynamics, (Cambridge University Press, 1967) pp.615.
- 4) H. Hanazaki: Phys. Fluids A1 (1989) 1976-1987.
- 5) 花崎秀史: 旋回流中に励起される非線形波動とその砕波, 日本流体力学会誌「ながれ」第15巻, (1996).
- 6) T. B. Benjamin: J. Fluid Mech. 25 (1966) 241-270.
- 7) R. H. J. Grimshaw & N. Smyth: J. Fluid Mech. 169 (1986) 429-464.
- 8) T. Y. Wu: J. Engng Mech. Div. ASCE 107 (1981) 501-522.
- 9) T. R. Akylas: J. Fluid Mech. 141 (1984) 455-466.
- 10) R. Grimshaw: Stud. Appl. Math. 83 (1990) 249-249.

- 11) H. Mitsudera & R. Grimshaw: Pageoph. 133 (1990) 635-644.
- 12) W. K. Melville & K. R. Helfrich: J. Fluid Mech. 178 (1987) 31-52.
- 13) H. Hanazaki: Phys. Fluids A4 (1992) 2230-2243.
- 14) T. R. Marchant & N. F. Smyth: J. Fluid Mech. 221 (1990) 263-288.
- 15) C. G. Koop & G. Butler: J. Fluid Mech. 112 (1981) 225-251.
- 16) T. Kakutani & N. Yamasaki: J. Phys. Soc. Jpn 45 (1978) 674-679.
- 17) S. J. Lee, G. T. Yates & T. Y. Wu: J. Fluid Mech. 199 (1989) 569-593.
- 18) H. Hanazaki: Phys. Fluids A3 (1991) 3117-3120.
- 19) H. Hanazaki: Phys. Fluids A5 (1993) 568-577.
- 20) R. R. Long: Tellus 5 (1953) 42-57.
- 21) J. W. Miles: J. Fluid Mech. 32 (1968) 549-567.
- 22) R. Grimshaw & Z. Yi: J. Fluid Mech. 229 (1991) 603-628.
- 23) R. Grimshaw & Z. Yi: to appear in Mathematica (1993).
- 24) R. Grimshaw & Z. Yi: Stud. Appl. Math. 88 (1993) 89-112.
- 25) H. Hanazaki: Phys. Fluids A5 (1993) 1201-1205..
- 26) C. Katsis & T. R. Akylas: J. Fluid Mech. 177 (1987) 49-65.
- 27) H. Hanazaki: J. Fluid Mech. 263 (1994) 293-318.
- 28) J. W. Miles: J. Fluid Mech. 79 (1977) 157-169.
- 29) J. W. Miles: J. Fluid Mech. 79 (1977) 171-179.
- 30) M. Tanaka: J. Fluid Mech. 248 (1993) 637-661.

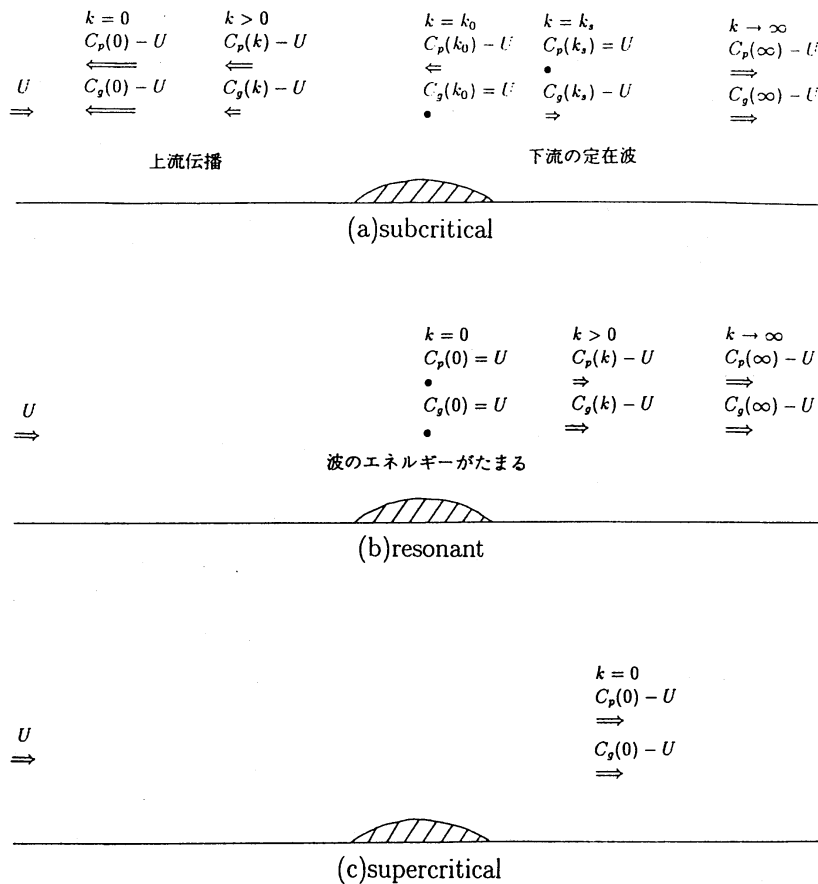


図1 線形理論にもとづく、物体による波の励起と伝播の状況。(a)subcritical($C_g(0) > U$), (b)resonant($C_g(0) = U$), (c)supercritical($C_g(0) < U$).

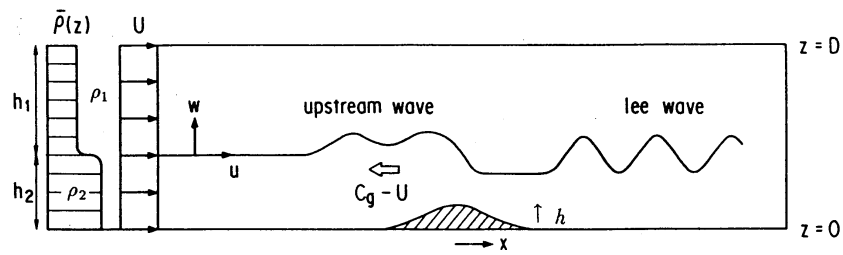


図2 物体を過ぎる二層流体の流れの模式図.

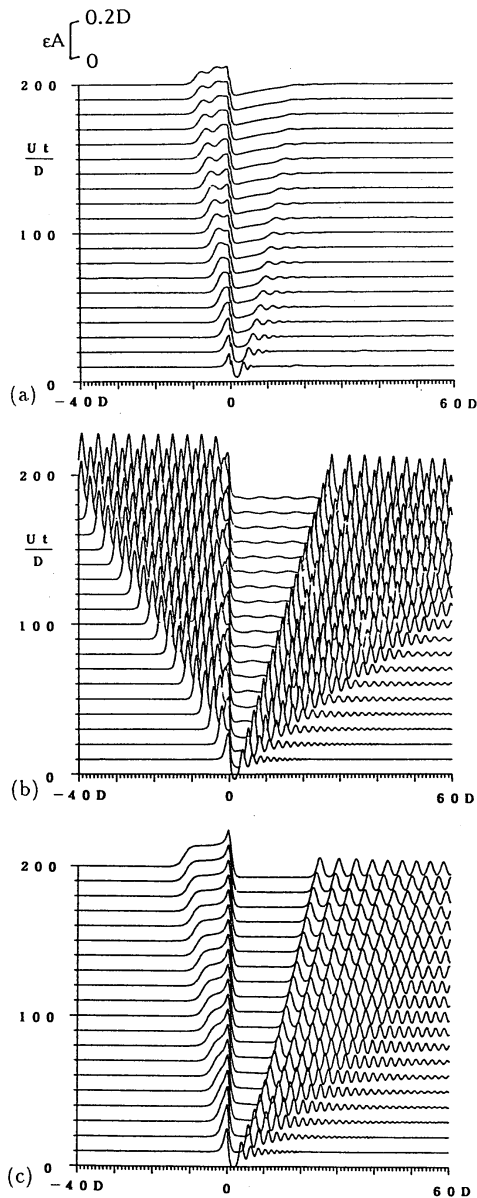


図3 二層流体の振幅 $A = A_1(x, t)$ の時間発展 ($F = 1.0$, 図2で $h_1 = 0.7D$, $h_2 = 0.3D$, $\rho_1 = 0.9\rho_2$, $h = 0.1D$.) (a) Navier-Stokes 方程式の解 ($Re = 10^3$), (b) fKdV 方程式の解, (c) fEKdV 方程式の解.

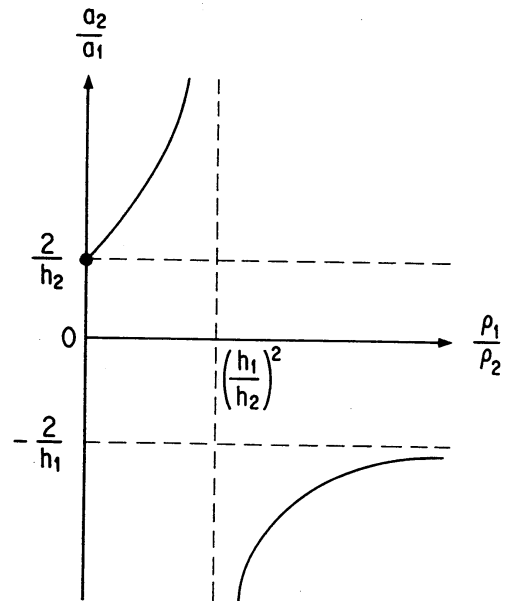


図4 二層流体における3次と2次の非線形項の係数の比: a_2/a_1 の ρ_1/ρ_2 依存性. 図の●の所で a_2/a_1 は最小となる.

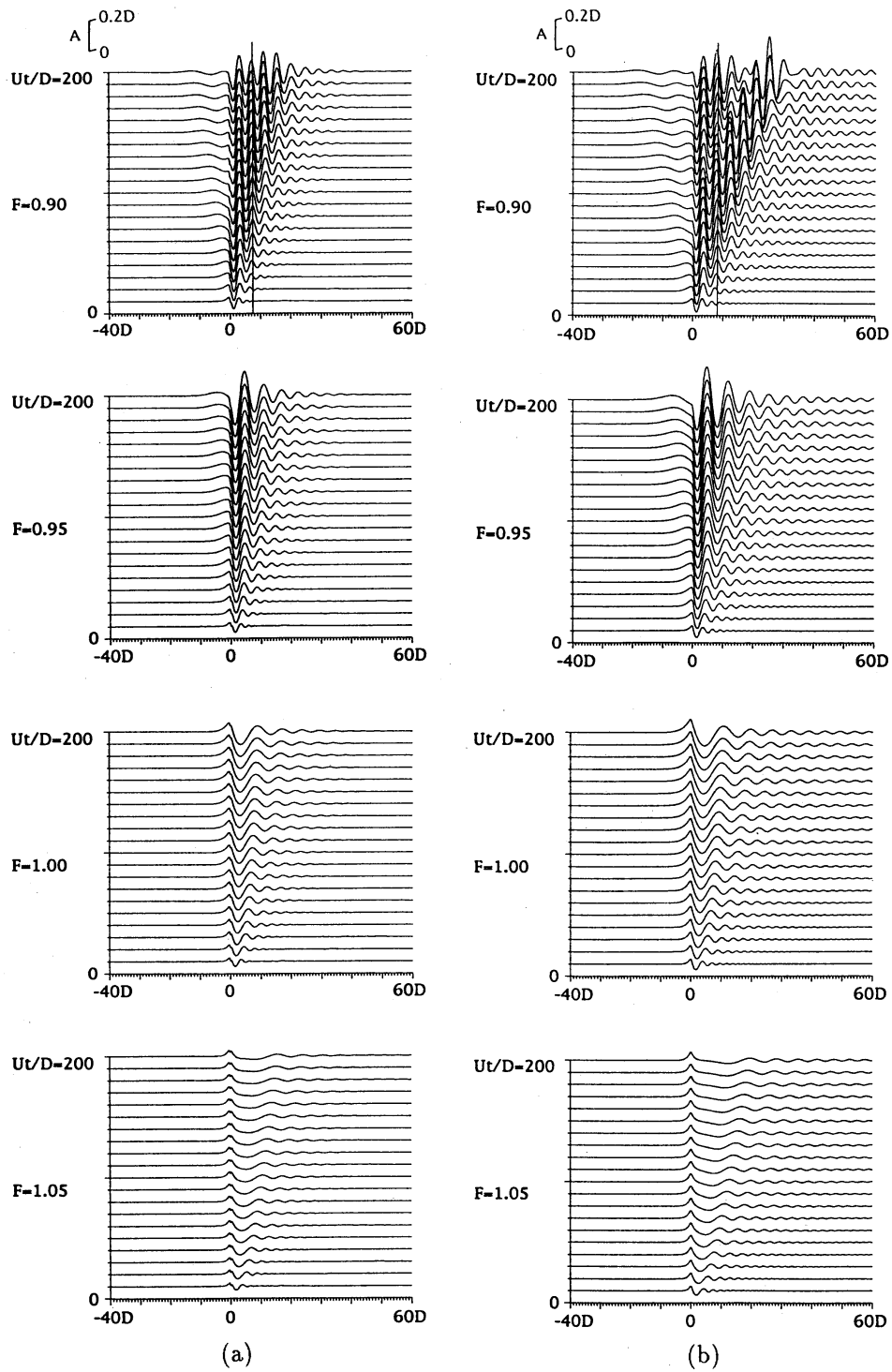


図5 プシネスク近似の成り立つ流体で、かつ、鉛直密度勾配 $d\rho/dz$ が一定の流体の共鳴条件 ($F=1$) 近傍での振幅 $A = A_1(x, t)$ の時間発展 ($h = 0.05D$)。 (a) Navier-Stokes 方程式の解, (b) GY 方程式の解。

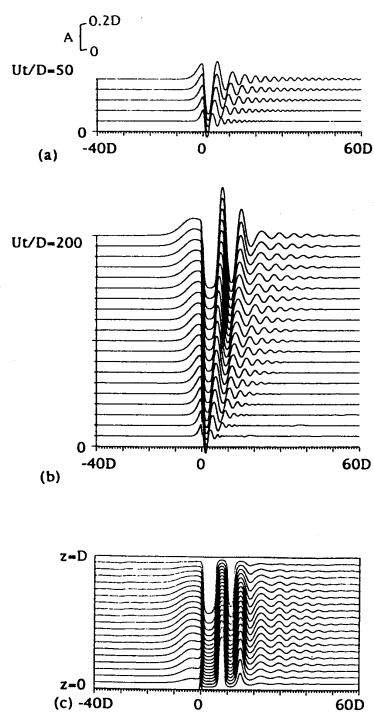


図6 プシネスク近似の成り立つ流体で、かつ、鉛直密度勾配 $d\rho/dz$ が一定の流体に対する $F = 0.95$ の解. 物体が高く、碎波が起こる場合 ($h = 0.15D$). (a)GY 方程式の解から得た振幅 $A = A_1(x, t)$ の時間発展.(b)Navier-Stokes 方程式の解から得た振幅 A の時間発展,(c)Navier-Stokes 方程式の解から得た流線 (時刻 $Ut/D=200$).

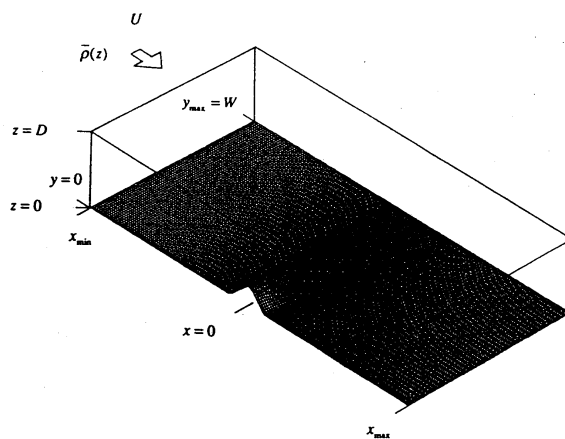


図7 3次元の二層流体の概念図.

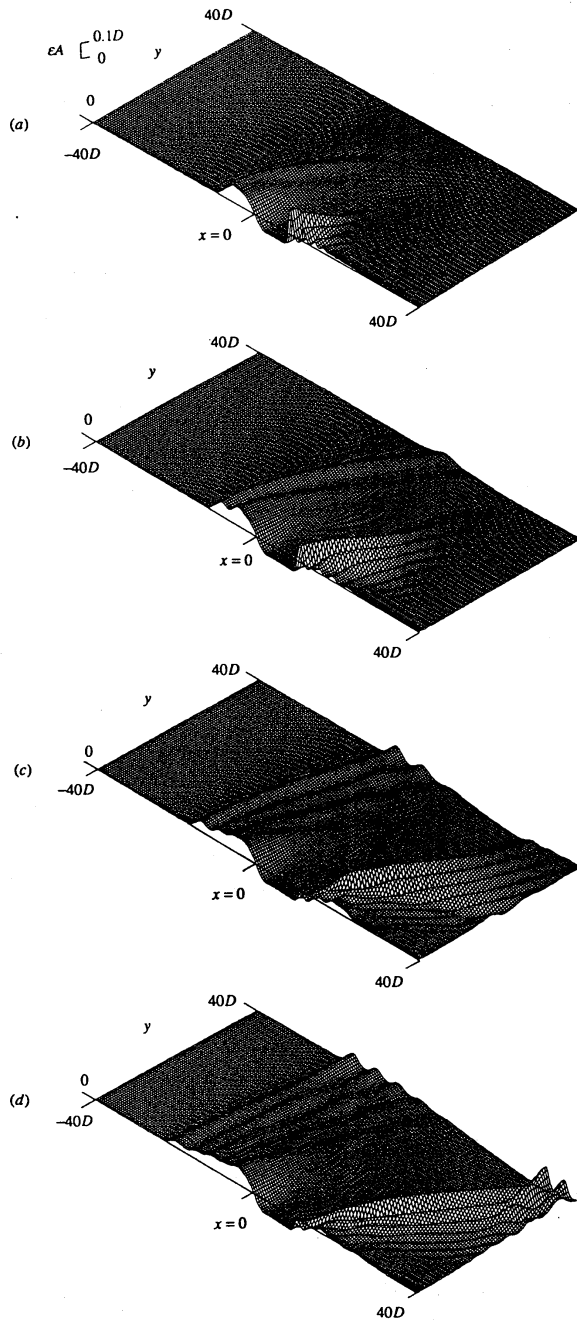


図8 3次元の二層流体中の波の振幅 $A = A_1(x, y, t)$ の時間発展. ($F = 1.0$, $Re = 10^4$, $h_1 = 0.7D$, $h_2 = 0.3D$, $\rho_1 = 0.9\rho_2$, $h = 0.1D$.) (a) $Ut/D = 40$, (b) $Ut/D = 80$, (c) $Ut/D = 200$, (d) $Ut/D = 400$.

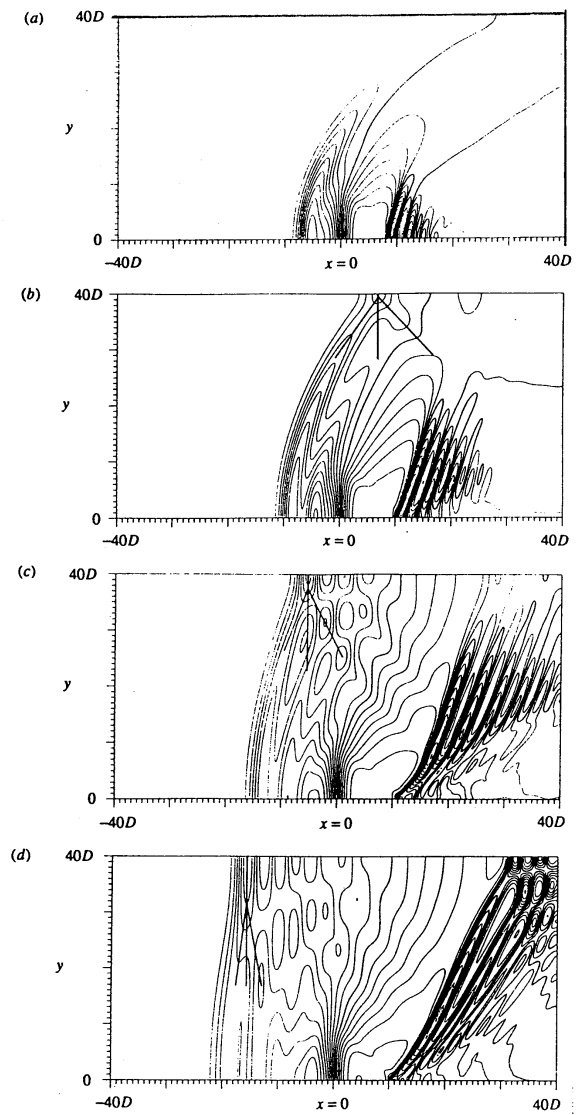


図9 図8に対応する波の振幅 $A = A_1(x, y, t)$ の等高線の時間発展. (a) $Ut/D = 40$, (b) $Ut/D = 80$, (c) $Ut/D = 200$, (d) $Ut/D = 400$.